

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. BERNARDI
A. BOVE

OPERATORI IPERBOLICI A CARATTERISTICHE MULTIPLE

21 APRILE 1988
28 APRILE 1988

1. NOTAZIONI, IPOTESI e RISULTATI

Nell'aperto $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ $x = (x_0, x_1, \dots, x_n) = (x_0, x')$ consideriamo il problema di Cauchy $P(x, D)u = f$, con dati di Cauchy sull'ipersuperficie non caratteristica $x_0 = 0$. P è un operatore differenziale lineare d'ordine m a coefficienti $C^\infty(\Omega)$, $P = P_m + P_{m-1} + \dots + P_0$. ($D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$). Se $\Omega_t = \{x \in \Omega \mid x_0 < t\}$ ricordiamo che il problema di Cauchy per P si dice ben posto in Ω_t se

- (i) $\forall f \in C_0^\infty(\Omega) \exists u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $Pu = f$ in Ω_t
 (ii) $\forall u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $Pu = 0$ in $\Omega_t \Rightarrow u = 0$ in Ω_t .

Faremo su P le seguenti ipotesi:

- H1) Il simbolo principale di P , $P_m(x, \xi)$ è iperbolico rispetto a ξ_0 , i.e.
 $P_m(x, \xi_0, \xi') = 0$ ha sempre soluzioni $\xi_0(x, \xi')$ reali, $\forall x \in \Omega$ e $\xi' \in \mathbb{R}^n$.
 H2) Le radici caratteristiche di $\xi_0 + P_m(x, \xi_0, \xi') = 0$ hanno molteplicità al più d'ordine 3 e l'insieme dei punti tripli:

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\Omega \mid P_m(x, \xi) = 0, dP_m(x, \xi) = 0, d^2P_m(x, \xi) = 0\}$$

è una sottovarietà C^∞ di $T^*\Omega$ tale che $\text{rango } \sigma|_\Sigma = \text{costante}$ e la 1 forma ω non si annulla identicamente su $T\Sigma^{(*)}$

- H3)_p ($p \in \Sigma$). Sia $P_{m,p}$ la localizzazione di P_m in p . E' un polinomio omogeneo del terzo ordine iperbolico rispetto a $(0, e_0)$ definito da
 $P_m(p + s\delta z) = S^3(P_{m,p}(\delta z) + O(1))$ $\delta z \in T_p(T^*\Omega)$. Su $P_{m,p}$ richiediamo che:

(*) Questo esclude che Σ sia isotropa, i.e. $T\Sigma \subset T^\sigma \Sigma$

$$(i) \quad P_{m,\rho}(\delta z) = L_1(\delta z) \cdot Q_2(\delta z)$$

con $L_1(\delta z) = \delta \xi_0 - \ell_1(\delta x, \delta \xi')$ e ℓ_1 forma lineare reale in $(\delta x, \delta \xi')$
 $(\delta z = (\delta x, \delta \xi))$.

(ii) $Q_2(\delta z)$ è una forma quadratica iperbolica reale tale che:

$$a) \quad \dim \ker F_{Q_2} = \dim T_\rho \Sigma$$

$$b) \quad \ker F_{Q_2}^2 \cap \text{Im} F_{Q_2}^2 = \{0\}$$

$$c) \quad \text{sp}(F_{Q_2}) \subset i\mathbb{R}.$$

$$d) \quad \dim \text{Im} F_{Q_2}^2 \geq 2$$

$$H4)_{p,\ell} \quad H_{L_1} \in \Gamma_{Q_2}^\sigma \cap \ker F_{Q_2}$$

$$H4)_{\rho,s} \quad H_{L_1} \in \text{Int}(\Gamma_{Q_2}^\sigma) \cap T_\rho \Sigma$$

dove $\Gamma_{Q_2}(\rho)$ denota il cono di iperbolicità di Q_2 , i.e. la componente connessa che contiene $(0, e_0)$ di $\{\delta z \in T_\rho(\mathbb{R}^* \Omega) \mid Q_2(\delta z) \neq 0\}$ e $\Gamma_{Q_2}^\sigma$ è il polare simplettico di Γ_{Q_2} ,
 $= \{\delta z \mid \sigma(\delta z', \delta z) \geq 0, \delta z' \in \Gamma_{Q_2}\}$. Il nostro primo risultato è il seguente

Teorema 1. Sia Ω aperto in \mathbb{R}^{n+1} , $0 \in \Omega$ e supponiamo che il Problema di Cauchy sia ben posto in Ω_t , per t piccolo. Sia $\rho \in \Sigma$ un punto caratteristico triplo per p_m . Valgano inoltre H1), H3) (i), (ii)c) e H4) $_{\rho,\ell}$. Allora le seguenti condizioni di Levi sono necessarie:

$$L1)_{\ell} \quad \text{Re } p^s(\rho) = 0,$$

$$H_{\text{Tr} + F_{Q_2} L_1} \pm \text{Re } p^s(\rho) \in \Gamma_\rho^\sigma(\rho)$$

$$L2) \quad \text{Im } p^S(\rho) = 0, H_{\text{Imp}}^S(\rho) = 0.$$

Il secondo risultato riguarda la sufficienza delle condizioni di Levi

Teorema 2. P verifichi le ipotesi $H1), H2), H3)_\rho, H4)_{\rho, S}$ $\rho \in \Sigma$. Allora, se:

$$L1)_S \quad \text{Re } p^S(\rho) = 0, \forall \rho \in \Sigma$$

$$H_{\text{Tr}+F_{Q_2}} L_1 + \text{Rep}^S(\rho) \in \text{Int}(\Gamma_\rho^\sigma(\rho)), \quad \forall \rho \in \Sigma$$

$$L2) \quad \text{Im } p^S(\rho) = 0, H_{\text{Imp}}^S(\rho) = 0, \forall \rho \in \Sigma$$

il Problema di Cauchy per P in Ω_0 è ben posto.

(qui $p^S(\rho) = p_{m-1}(\rho) + \frac{i}{2} \nabla_{x, \xi} p_m(\rho)$ è il simbolo sottoprincipale di P in ρ ; lo Hamiltoniano di una forma lineare L_1 è il differenziale letto via σ , $\sigma(t, H_{L_1}) = \langle t, dL_1 \rangle$)

Alcune osservazioni

L'ipotesi $H4)_{\rho, S}$ implica che $P_{m, \rho}$ è un operatore strettamente iperbolico e che $\Gamma_\rho(\rho) = \Gamma_{Q_2}$. Inoltre si ha che $H_{L_1} \in T_\rho \Sigma \cap (T_\rho \Sigma)^\sigma$, che è lo spazio tangente in ρ alla foglia F_ρ della foliazione naturale che esiste su Σ per H_2). Questo implica in particolare che nessuna bicaratteristica nulla di P ha punti limite su Σ . Dalle caratteristiche doppie [B-B]1 si sa che nel caso non-effettivo iperbolico il flusso Hamiltoniano ha punti limite su Σ precisamente in situazioni in cui ancora non si conoscono condizioni sufficienti per la buona posizione del problema di Cauchy. L'ipotesi $H3)_\rho$ (i) assicura che non ci sono variabili normali a Σ in cui P_m degenera più velocemente, mentre $H3)_\rho$ (ii) garantisce che F_{Q_2} non ha blocchi di Jordan d'ordine 4 nello zero.

Che $H1)$ sia necessaria è una conseguenza del Teorema di Lax-Mizohata

(vedi [H]). Le condizioni di Levi $L1)_{s,\ell}$ e $L2)$ contengono in particolare le condizioni necessarie di Ivrii-Petkov che in questo caso dicono che $P_{m-1}(p) = 0$, se $p \in \Sigma$. Se P è completamente fattorizzato, i.e. $P = L \cdot B$, dove $L(x,D) = D_0 - \ell(x,D')$ e B è un operatore non effettivamente iperbolico, le nostre condizioni si riducono alle solite condizioni di Ivrii-Petkov-Hörmander per B . Notiamo infine che tutte le ipotesi e condizioni di Levi sono invarianti per trasformazioni canoniche.

Consideriamo un esempio per illustrare i nostri risultati (vedi [B]):

$$(M) \quad P(x,D) = (D_0 - \ell D_1) (-D_0^2 + D_1^2 + \mu(D_2^2 + x_2^2 D_n^2)) + P_2(x,D) + P_1(x,D) + P_0(x,D).$$

qui $\ell \in \mathbb{R}$, $\mu > 0$ equivalgono a $H1)$

$H2)$ è automatica e $\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\mathbb{R}^{n+1} \mid \xi_0 = 0, \xi_1 = \xi_2 = 0, x_2 = 0\}$.

$H3)_p$ (i) e (ii) sono pure immediate $(-D_0^2 + D_1^2 + \mu(D_2^2 + x_2^2 D_n^2))$ è non effettivamente iperbolico).

$H4)_{p,\ell}$ dice $|\ell| \leq 1$. Mentre $L1)_\ell$ e $L2)$ sono equivalenti ad affermare, se

$$P_2(x,D) = (c_0 D_0 + c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 x_2 D_n) D_n, \quad \text{che } c_j \in \mathbb{R}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \text{ e che}$$

$$\mu \geq |c_0| + \frac{1}{\mu} \sqrt{(c_2^2 + c_3^2) + (|c_1| - \ell\mu)^2}$$

che risultano essere le condizioni necessarie e sufficienti per la buona posizione del Problema di Cauchy per l'operatore modello.

2. IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1

Supponiamo che il problema di Cauchy per P in Ω_t sia ben posto. Una prima conseguenza è che se K è un compatto di Ω , $\exists \mu > 0$ tale che

$$(1) \quad \inf_{\substack{u|_{\Omega_0} = u \\ u \in \mathcal{S}}} \|u\|_{(-\mu)} = \|u\|_{(-\mu)}^- \leq C \|Pu\|_{(\mu)}^-, \quad u \in C_0^\infty(K)$$

In effetti il Teorema 1 mostra che le condizioni $L1)_\rho$, $L2)$ sono necessarie per (1). L'idea, dovuta a Ivrii-Petkov e perfezionata da Hörmander, consiste nell'approssimare P microlocalmente vicino a una caratteristica tripla con un opportuno localizzato in modo da violare (1). Tale localizzazione deve essere eseguita utilizzando solo un sottogruppo del gruppo simplettico, vista la natura differenziale del problema e la necessità di conservare il tempo. Una classe di trasformazioni canoniche ammissibile è senz'altro quella delle dilatazioni simplettiche $\chi(x, \xi) = (\rho^s x, \rho^{-s} \xi)$ dove $s = (s_0, s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. La (1) si dilata di conseguenza ($\rho > 0$):

$$(1)' \quad \|u\|_{(-\mu)}^- \leq C \rho^\tau \|P_\rho u\|_{(\mu)}^-, \quad u \in C_0^\infty(M)$$

M compatto in Ω , $P_\rho(y, D) = P(x_0 \rho^{-s_0}, \dots, D_0 \rho^{s_0}, \dots)$, $\tau = \max 2\mu s_j$. In questo modo si assegnano pesi alle variabili e si possono evidenziare i termini d'ordine inferiore in P . Per provare che le condizioni $L1)$ e $L2)$ sono necessarie si tratta di costruire, supponendole negare, una serie formale $\sum_0^\infty e^{i\rho\psi_\rho - j} v_j = u_\rho$ che risolve asintoticamente per $\rho \rightarrow +\infty$, $P_\rho u_\rho = 0$ ma tale che $u_\rho(0) \neq 0$. In tutta la costruzione è fondamentale che $\text{Im}\psi(x) \geq c|x|^2$, per "realizzare" la serie formale che definisce u_ρ . La prova procede in tre passi: prima si recuperano le condizioni necessarie di Ivrii-Petkov, $p^s(\rho) = 0$, quindi si mostra che $H_{\text{Imp}^s(\rho)} = 0$ e infine che

$$H_{\text{Tr}+F_{Q_2}} L_1 \perp \text{Rep}^s(\rho) \in \Gamma_p^\sigma(\rho), \quad \text{dove } \rho \in \Sigma.$$

Non è restrittivo supporre che $\rho = (0, e_n)$. Dilatiamo P con $\chi(x, \xi) = (x\rho^S, \xi\rho^{-S})$ con $s_j = \frac{2}{3} s_n$, $j < n$. Sviluppando secondo Taylor si ha:

$$P_\rho(x, D) = \left\{ \sum_{\substack{|\alpha|=3 \\ \alpha_n=0}} \frac{1}{\alpha!} p_m^{(\alpha)}(0, e_n) D^\alpha + p_{m-1}(0, e_n) D_n^2 \right\} D_n^{m-3} + O(\rho^{-1/3})$$

dove $O(\rho^{-1/3})$ significa un resto che moltiplicato per $\rho^{1/3sn}$ è un polinomio omogeneo in ξ a coefficienti limitati in $C^\infty(\Omega \times R_\rho^t)$, $\rho \rightarrow +\infty$.

Dilatiamo ancora con

$$(x, \xi) \rightarrow (x_0, \rho x_1, \dots, \rho x_{n-1}, x_n; \xi_0, \rho^{-1} \xi_1, \dots, \rho^{-1} \xi_{n-1}, \xi_n)$$

Se S_n è scelto abbastanza grande si ha:

$$(2) \quad P_\rho(x, D) = \left\{ \frac{1}{6} \frac{\partial^3 p_m}{\partial \xi_0^3} (0, e_n) D_0^3 + p_{m-1}(0, e_n) D_n^2 \right\} D_n^{m-3} + O(\rho^{-N}), \quad \forall N \gg$$

Senza minor generalità $m = 3$ e $\frac{1}{6} \frac{\partial^3 p_m}{\partial \xi_0^3} (0, e_n) = 1$. Vogliamo risolvere formalmente

$P_\rho u_\rho = 0$ in un intorno di $0 \in \Omega$. Cercheremo u_ρ nella forma:

$$u_\rho(x) = E_\rho(x) \sum_{j \geq 0} \rho^{-j/2} v_j(x)$$

dove $E_\rho(x) = \exp(i\rho^{3/2} x_n + i\phi_\rho(x))$

$$\phi_\rho(x) = i\rho(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) + i\rho x_n^2 + \rho\gamma x_0$$

γ è la radice di $\gamma^3 + p_{m-1}(0, e_n) = 0$

con $\text{Im} \gamma < 0$, se $p_{m-1}(0, e_n) \neq 0$.

Da (2) si ha:

$$E_{\rho}^{-1}(x) P_{\rho} u_{\rho}(x) = [\rho^3 (\gamma^3 + P_{m-1}(i, e_n)) + \\ + \rho^2 (3\gamma^2 D_0 + 4i P_{m-1}(0, e_n) x_n) + \rho^{3/2} L_1(x, D) + \dots] \sum_{j \geq 0} \rho^{-j/2} v_j(x).$$

in un intorno fissato di 0, M. Vista la scelta di γ , scegliamo $v_0 \in C_0^{\infty}(M)$ soluzione di

$$(3\gamma^2 D_0 + 4i P_{m-1}(0, e_n) x_n) v_0 = 0, \text{ in } M \quad v_0(0) = 1.$$

Allora $v_j, j > 1$, si trovano per iterazione. E' facile allora vedere che (1)' è contraddetta. Si procede come nella prova di Lax-Mizohata. Sia $x \in C_0^{\infty}(\Omega_0)$ e $x_p(x) = x(\rho^{3/2} x)_{\rho^{(n+1)3/2}}$ allora

$$|\langle u_{\rho}, x_p \rangle| \leq \|x_p\|_{(u)} \|u\|_{(-u)} = 0(\rho^{-N}) \quad \forall N > 1$$

Ma $\langle u_{\rho}, x_p \rangle \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} v_0(0) \int e^{ix_n} x(x) dx \neq 0$ per una scelta opportuna di x .

Notiamo che l'ipotesi H3) non è stata sfruttata. Per provare la necessità di L1) e L2) dilatiamo $P(x, D)$ secondo $x(x, \xi) = (\rho^s x, \rho^{-s} \xi)$ con $s_j = \frac{s_n}{2}$, $j < n$. Sviluppando secondo Taylor è facile vedere che:

$$(3) \quad P_{\rho}(x, \xi) = (P_{m, (0, e_n)}(\xi_n x, \xi) + P_{m-1, (0, e_n)}(\xi_n x, \xi)) \xi_n^{m-3} + 0(\rho^{-1/2 s_n})$$

e per H3) (i), (3) è uguale a:

$$(3)' \quad P_{\rho}(x, \xi) = [(\xi_0^{-1} Q_1(\xi_n x, \xi') + \\ + P_{m-1, (0, e_n)}(\xi_n x, \xi) \xi_n] \cdot \xi_n^{m-3} + 0(\rho^{-1/2 s_n})$$

Ora bisogna procurarsi delle "buone" coordinate in $T_{(0, e_n)}(\dot{T}^* \Omega)$. I

cambi di coordinate nel tangente a $T^*\Omega$ vengono indotti da cambi di coordinate nella base che rispettano il problema di Cauchy con dati a $x_0=0$. Si vede facilmente che questo significa considerare il sottogruppo di $Sp(T_{(0, e_n)}(T^*\Omega))$, gruppo lineare simplettico, che rispetta il piano lagrangiano $y=0$, (la fibra) e il vettore di periodicità $(0, e_0)$. Si vede facilmente allora che si può decomporre

$$x = (x_0, x', x'', x''', x^{iv}, x_n), \text{ con } x' = (x_1, \dots, x_d)$$

$$x'' = (x_{d+1}, \dots, x_{2\ell}), x''' = (x_{2\ell+1}, \dots, x_n), x^{iv} = (x_{n'+1}, \dots, x_{n-1}) \text{ in modo tale che}$$

$$(i) \quad \frac{\text{Ker } F_{Q_2}}{\text{Ker } F_{Q_2} \cap \text{Im } F_{Q_2}} \text{ si trasforma nel sottospazio simplettico}$$

$$\{(x, \xi) | x_0 = \dots = x_n = 0, \xi_0 = \dots = \xi_n = 0\}$$

$$(ii) \quad \text{Ker } F_{Q_2} \cap \text{Im } F_{Q_2}, \text{ "la foglia", si trasforma nel sottospazio isotropo } 1+\ell \text{ dimensionale}$$

$$\{(x, \xi) | x_1 = \dots = x_d = 0, \dots, x_{\ell+1} = \dots = x_n = 0, \xi_0 = 0,$$

$$\xi_{d+1} = \dots = \xi_n = 0\}$$

$$(iii) \quad \text{Im } F_{Q_2}^2 \text{ si trasforma nel sottospazio simplettico}$$

$$\{(x, \xi) | x_0 = \dots = x_\ell = 0, x_{n'+1} = \dots = x_n = 0,$$

$$\xi_0 = \dots = \xi_\ell = 0, \xi_{n'+1} = \dots = \xi_n = 0\}$$

$$(iv) \quad \text{In queste nuove coordinate}$$

$$\begin{aligned}
P_\rho(x, D) = & \{ (D_0 - \lambda', x' > D_n - \langle \lambda'', D'' \rangle) \cdot \\
& \cdot [-D_0^2 + 2D_0 L_1(x' D_n, D'') + 2D_0 L_2(x''' D_n, D''') \\
& + Q^{(1)}(x' D_n, D'') + Q^{(2)}(x''' D_n, D''') \\
& + Q^{(3)}(x' D_n, D''; x''' D_n, D''')] + \\
& + (c_0 D_0 + \langle c', x' > D_n + \langle c'', D'' \rangle + \langle c''', x''' > D_n \\
& + \langle c''', D''' \rangle) D_n^{m-3} + O(\rho^{-1/2} \sin)
\end{aligned}$$

dove $L_1(L_2)$ è una forma lineare su $R^k(R^{2(n'-k)})$, $Q^{(1)}(Q^{(2)})$ è una forma quadratica definita positiva su $R^k(R^{2(n'-k)})$ e $Q^{(3)}$ è una forma reale bilineare su $R^k \times R^{2(n'-k)}$. Le coordinate possono inoltre essere scelte in modo tale che $Q^{(2)}(x''', ix''') = 0$. Senza minor generalità $m = 3$ d'ora in poi. Dilatando con $(x_0, x', x'', x''', x^{iv}, x_n) \rightarrow (\frac{x_0}{\rho^2}, \frac{x'}{\rho^3}, x'', \frac{x'''}{\rho^2}, x^{iv}, \frac{x_n}{\rho^4})$, insieme con la sua duale e coniugando con

$$E_\rho(x) = \exp(-\frac{1}{2} \rho^2 |x'''|^2 \xi_n + i \rho^2 x_n \xi_n + i \rho^3 \langle x'', \xi'' \rangle + i \rho \phi(x))$$

dove ξ'' , $\xi_n > 0$ e ϕ fase C^∞ saranno scelti più tardi si ottiene un nuovo localizzato $P_\rho(x, D)$ che può essere sviluppato secondo le potenze decrescenti di ρ per ottenere:

$$\begin{aligned}
(4) \quad P_\rho(x, D) = & \rho^4 \{ (\phi_{x_0} - \langle \lambda', x' > \xi_n - \langle \lambda'', \xi'' \rangle) \cdot \\
& \cdot [2\phi_{x_0} L_2(x''' \xi_n, ix''' \xi_n) + 2\langle A^{(2)} x''' \xi_n, x''' \phi_{x_m} \rangle + \\
& + 2\langle C^{(2)}; x''' \xi_n, \phi x''' \rangle + Q^{(3)}(x' \xi_n, \xi''; x''' \xi_n, x''' \xi_n) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2\langle B^{(2)}_{x''' \xi_n, \phi_{x''}} \rangle + 2i\langle B^{(2)}_{x'' \phi_n, x''' \xi_n} \rangle + \\
& + \{ \langle c'''_1, x'' \rangle_{\xi_n} + \langle c'''_2, ix''' \xi_n \rangle_{\xi_n} \} + \\
& + \rho^3 \{ (\rho_{x_0} - \langle \lambda', x' \rangle_{\xi_n} - \langle \lambda'', \xi'' \rangle) [-\phi_{x_0}^2 + 2y_{x_0} L_1(x' \xi_n, \xi'')] \\
& + 2\phi_{x_0} L_2(x'' \phi_{x_n}, \phi_{x''}) + 2L_2(x''' \xi_n, ix''' \xi_n) D_0 \\
& + Q^{(1)}(x' \xi_n, \xi^n) + 2\langle A^{(2)}_{x''' \xi_n, x''' D_n} \rangle + \\
& + \langle A^{(2)}_{x''' x''} \rangle \phi_{x_m}^2 + 2\langle C^{(2)}_{x'' \xi_n, D''} \rangle \\
& + \langle C^{(2)}_{\phi_{x''}, \phi_{x''}} \rangle + \xi_n \text{Tr} C^{(2)} + \\
& + 2\langle B^{(2)}_{x''', D''} \rangle_{\xi_m} + 2\langle B^{(2)}_{x'' \phi_{x''}, \phi_{x''}} \rangle \\
& + 2i\langle B^{(2)}_{x''', D''} \rangle_{\xi_n} \\
& + Q^{(3)}(x' \xi_n, \xi''; x'' \phi_{x_n}, \phi_{x''}) + \\
& + Q^{(3)}(x' \phi_{x_n}, 0; x''' \xi_n, ix''' \xi_n) + \\
& + (D_0 - \langle \lambda, x' \rangle_{\phi_{x_n}}) [2\phi_{x_0} L_2(x''' \xi_n, ix''' \xi_n) + \\
& + 2\langle B^{(2)}_{x''' \xi_n, \phi_{x''}} \rangle + 2\langle A^{(2)}_{x''' \xi_n, x'' \phi_{x_n}} \rangle + \\
& + 2\langle C^{(2)}_{ix''' \xi_n, \phi_{x''}} \rangle + Q^{(3)}(x' \xi_n, \xi''; x''' \xi_n, ix''' \xi_n) \\
& + 2i\langle B^{(2)}_{x'' \phi_{x_n}, x''' \xi_n} \rangle + \\
& + (C_0 \phi_{x_0} + \langle c', x' \rangle_{\xi_n} + \langle c'', \xi'' \rangle + \langle c''', x''' \rangle_{\phi_{x_0}} +
\end{aligned}$$

$$+ \langle C_2^m, \phi_{x^m} \rangle \xi_n + \phi_{x_n} (\langle C_1^m, x^m \rangle \xi_n + \langle C_2^m, i x^m \xi_n \rangle) \} + O(\rho^2)$$

dove abbiamo posto

$$Q^{(2)}(x^m, \xi^m) = \langle A^{(2)} x^m, x^m \rangle + 2 \langle B^{(2)} x^m, \xi^m \rangle + \langle C^{(2)} \xi^m, \xi^m \rangle$$

$$A^{(2)} = C^{(2)} = t_C^{(2)}, \quad t_B^{(2)} = -B^{(2)}$$

Notiamo che $\text{Tr} F_{Q_2} = \text{Tr} C^{(2)}$. Denotando con t le variabili involutive (x', ξ_n, ξ'') e

$Q^{(3)}(t; x^m, \xi^m) = 2 \langle M_1 t, x^m \rangle + 2 \langle M_2 t, \xi^m \rangle$ osserviamo che il nostro scopo è di annullare il termine in ρ^4 in (4) usando serie formali di potenze, rispetto a $x^m=0$, le variabili simplettiche spaziali. Il primo problema è quello di determinare la fase a $x^m=0$. Calcolando il termine in ρ^4 a $x^m=0$ ed esplicitando ϕ_{x^m} si ha

$$(5) \quad \phi_{x^m} = -iF \left[-\frac{\xi n}{2} \frac{1}{\psi_{x_0}} C_1 - \psi_{x_0} L_2 - Ht \right]$$

dove $F = (C^{(2)} + iB^{(2)})^{-1}$,

$$\psi = \phi - x_0 \langle \Lambda, t \rangle$$

$$\Lambda = (\lambda', \lambda''), \quad C_1 = C_1^m + iC_2^m$$

$$L_2 = L_2' + iL_2''$$

$$H = M + L_2 \quad \Lambda, \quad M = M_1 + iM_2$$

Per alleggerire le notazioni vediamo come si determina ϕ con $\text{Im} \phi \geq c|x|^2$ nel caso dell'operatore modello (M). (5) diventa

$$\phi_{x_2} = i \left[\frac{\xi n}{2} \frac{1}{\psi_{x_0}} c \right], \quad \text{con } c = c_3 + ic_2$$

Calcoliamo ora il coefficiente di $\rho^3 x_2 = 0$ e sostituiamo il valore di ψ_{x_2} ottenuto. Si ha l'equazione di 4° grado in ψ_{x_0} :

$$(6) \quad \psi_{x_0}^4 + 2\ell\epsilon_1\psi_{x_0}^3 - [(1-\ell^2)\epsilon_1^2 + \epsilon_n(c_0+\mu)]\psi_{x_0}^2 - \epsilon_n(c_1+\ell c_0)\epsilon_n\psi_{x_0} + L_4\epsilon_n \frac{|c|^2}{n} = 0$$

dove $t = \epsilon_1$, $\Lambda = \ell$, $F = 1$, $H = 0$.

E' immediato veder ora come c_0 e c_1 debbano essere reali. Se, per esempio, $c_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (6) con $\epsilon_1 = 0$ si riduce a

$$(6)' \quad \psi_{x_0}^4 - \epsilon_n(c_0+\mu)\psi_{x_0}^2 + \frac{1}{4}\epsilon_n^2 \frac{|c|^2}{\mu} = 0$$

che ha certamente una soluzione ψ_{x_0} con $\text{Im}\psi_{x_0} < 0$.

Analogamente si ragiona se $c_1 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. (La prova che c_2 e $c_3 \in \mathbb{R}$ è più semplice e si ottiene da subito localizzando opportunamente l'operatore. Qui è omessa).

Vediamo da ultimo come $L_1)_\ell$, che in questo caso è $\mu \geq |c_0| + \sqrt{\frac{1}{u}|c|^2 + (|c_1| - \ell n)^2}$, sia necessaria. La prova è in effetti la stessa del caso generale. L'equazione (6) con $\epsilon_n = 1$ può essere riscritta:

$$(7) \quad \left[\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2}} (\psi_{x_0}^2 - \frac{1}{2} [c_0 + \ell c_1 + \mu(1-\ell^2)]) + \sqrt{1-\ell^2} \left(-\frac{\ell}{1-\ell^2} \psi_{x_0}^2 + \epsilon_1 \psi_{x_0} + \frac{c_1 + \ell c_0}{2(1-\ell^2)} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{1-\ell^2}} (\psi_{x_0}^2 - \frac{1}{2} [c_0 + \ell c_1 + \mu(1-\ell^2)]) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\sqrt{1-\ell^2} \left(-\frac{\ell}{1-\ell^2} \psi_{x_0}^2 + \xi_1 \psi_{x_0} + \frac{c_1 + \ell c_0}{2(1-\ell^2)} \right) = \\
& = \frac{1}{4} [(c_0 + \mu)^2 - (c_1 - \ell \mu)^2 - \frac{|c|^2}{4}]
\end{aligned}$$

e la quantità a secondo membro è esattamente quella che compare nella condizione di Levi. Se quest'ultima è falsa si ha:

$$(i) \quad (c_1 - \ell \mu)^2 > (c_0 + \mu)^2$$

oppure

$$(ii) \quad (c_1 - \ell \mu)^2 \leq (c_0 + \mu)^2$$

Mostreremo ora che l'equazione (6) ha al più 2 zeri reali.

Nel caso (i) la (6) può essere riscritta nella forma

$$\begin{aligned}
\psi_{x_0} g(\psi_{x_0}) + \frac{1}{4} \frac{|c|^2}{\mu} = 0, \text{ dove } g(\psi_{x_0}) = \psi_{x_0}^3 + 2\ell \xi_1 \psi_{x_0}^2 - (1-\ell^2) \psi_{x_0} - (c_0 + \mu) \psi_{x_0} - \\
- \xi_1 (c_1 + \ell c_0)
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\exists \xi_1 \in \mathbb{R}$ tale che $g(\psi_{x_0}) = 0$ ha un solo zero reale. Infatti, se

$P_3(S_0, \sigma)$, $S_0 \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^k$ è un polinomio omogeneo del terzo ordine che ha tre zeri reali in S_0 per ogni σ e $P_1(S_0, \sigma)$ è un polinomio omogeneo del primo ordine, allora $P_3 + P_1$ avrà tre zeri reali in S_0 , $\forall \sigma$ se $\nabla_{S_0, \sigma} P_1$ appartiene al polare euclideo del cono di iperbolicità di P_3 . Ora per g questa condizione è equivalente a (ii). Quindi g ha un solo zero reale ζ che possiamo supporre negativo se (i) vale. Dato che $h(\psi_{x_0}) = \psi_{x_0} g(\psi_{x_0})$ ha un solo minimo relativo in $[\zeta, 0]$ questo completa la prima parte. D'altronde se (ii) vale scegliendo

$$\xi_1 = \left| \frac{c_1 - \ell \mu}{2} \right| \sqrt{\frac{2}{c_0 + \mu + \ell(c_1 - \ell \mu)}} \quad \text{la (6) può anche essere riscritta da (7)}$$

$$\begin{aligned}
 (8) \quad & \left[\frac{1}{1-\ell} \psi_{x_0}^2 - \frac{1}{2} [c_0 + \ell(c_1 - \ell\mu)]^2 - \right. \\
 & \left. - (1-\ell^2) \left(-\frac{\ell}{1-\ell} \psi_{x_0}^2 + \xi_1 \psi_{x_0} + \frac{c_1 + \ell c_0}{2(1-\ell^2)} \right) \right] \\
 & = \frac{1}{4} [(c_0 + \mu)^2 - (c_1 - \ell\mu)^2 - \frac{|c|^2}{\mu}]
 \end{aligned}$$

Si vede che per $\psi_{x_0}^2 = \frac{1}{2} [c_0 + \mu + \ell(c_1 - \ell\mu)]$ il primo membro di (8) ha un minimo relativo e questo basta per concludere che anche in questo caso la (6) può essere risolta con $\text{Im} \psi_{x_0} < 0$.

Questo termina la costruzione, nel caso modello, della fase a $x_2 = 0$, per determinare completamente la soluzione asintotica u_ρ nella forma

$E_\rho(x) \sum_{j \geq 0} \rho^{-j} v_j(x)$ occorre spingersi in (4) fino a $O(\rho)$, per poter risolvere le equazioni di trasporto che sono in generale Fuchsiane e coinvolgono condizioni sui termini d'ordine inferiore. Si rimanda a [B-B]2 e a [H] per i dettagli e i lemmi di risolubilità.

3. IDEA DELLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2

Ragioniamo per semplicità nel caso dell'operatore modello (M). La tecnica per dimostrare che $L1)_s$ e $L2)$ sono sufficienti a garantire la buona posizione del problema di Cauchy con dati a $x_0 = 0$ è standard e consiste nel moltiplicare opportunamente in $L^2(\mathbb{R}^n)$ l'operatore e ottenere una energia definita positiva. Più precisamente se $P(x, D) = (D_0 - \ell D_1)(-D_0^2 + D_1^2 + n(D_2^2 + x_2^2 D_n^2)) + (c_0 D_0 + c_1 D_1 + c_2 D_2 + c_3 x_2 D_n)dn$ sia $M(x, D) = -D_0^2(D_0 - \ell D_1) + \gamma Dn$ con $\gamma \in \mathbb{R}^+$ da determinarsi e poniamo $2i \text{Im} \langle Pu, Mu \rangle$, dove $\langle f, g \rangle = \int f(x_0, x) \bar{g}(x_0, x') dx'$. Osserviamo che P può essere riscritto come:

$$P = D_0 M + (D_0 - \varepsilon D_1)(D_1^2 + \mu X^* X) \\ + ((c_0 + \mu - \gamma)D_0 + (c_1 - \varepsilon \mu)D_1 + \operatorname{Re}(cX)D_n)$$

dove $X = D_2 + ix_2 D_n$; $c = c_2 + ic_3$, $u \in C_0^\infty$.

Integrando per parti si vede facilmente che

$$(9) \quad i \operatorname{Im} \langle Pu, Mu \rangle = D_0 E, \text{ dove}$$

$$E = |Mu|^2 + |D_1(D_0 - \varepsilon D_1)u|^2 + \\ + \mu |X(D_0 - \varepsilon D_1)u|^2 + \gamma |D_1 u|_{1/2}^2 + \\ + \mu \gamma |Xu|_{1/2}^2 + (c_0 + \mu - \gamma) |D_0 u|_{1/2}^2 + \gamma (c_0 + \mu - \gamma) |\mu|_1^2 + \\ + \operatorname{Re}(c_1 - \varepsilon \mu) \langle D_1 u, D_0 D_n u \rangle + \operatorname{Re}(c_1 - \varepsilon \mu) \langle D_1 D_n u, (D_0 - \varepsilon D_1)u \rangle \\ + \operatorname{Re} \langle \operatorname{Re}(cX) D_n u, D_0 u \rangle + \operatorname{Re} \langle \operatorname{Re}(cX) D_n u, (D_0 - \varepsilon D_1)u \rangle$$

dove $|u|_s^2$ indica la norma di u in $H^s(\mathbb{R}^n)$. Per provare che E è definita positiva se $L1)_s$ e $L2)$ valgono lavorando microlocalmente con $\varepsilon_n > 0$, passiamo a notazione matriciale:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{c_1 - \varepsilon n}{2} \\ 0 & \mu & \frac{c}{2} \\ \frac{c_1 - \varepsilon \mu}{2} & \frac{\bar{c}}{2} & \gamma(c_0 + \mu - \gamma) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1(D_0 - \varepsilon D_1)u \\ X(D_0 - \varepsilon D_1)u \\ D_n u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1(D_0 - \varepsilon D_1)u \\ X(D_0 - \varepsilon D_1)u \\ D_n u \end{vmatrix} >$$

$$+ < \begin{vmatrix} \gamma & 0 & \frac{c_1 - \ell\mu}{2} \\ 0 & \mu\gamma & \frac{\bar{c}}{2} \\ \frac{c_1 - \ell\mu}{2} & \frac{\bar{c}}{2} & c_0 + \mu - \gamma \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1 u \\ X u \\ D_0 u \end{vmatrix} \begin{vmatrix} D_1 u \\ X u \\ D_0 u \end{vmatrix} > \frac{1}{2} + |Mu|^2 = E' + |Mu|^2.$$

Si vede subito che se si sceglie $\gamma = \frac{c_0 + \mu}{2}$ entrambe le matrici sono definite positive se L1) è soddisfatta.

Finalmente moltiplichiamo per e^{-2rx_0} e integriamo per $x_0 > 0$ la (9); si ha:

$$(10) \quad \frac{1}{r} \int_{-\infty}^0 |Pu|^2 e^{-2rx_0} dx_0 \geq E(0) + \frac{r}{2} \int_{-\infty}^0 e^{-2rx_0} |Mu|^2 dx_0 + \\ + 2r \int_{-\infty}^0 e^{-2rx_0} E'(x_0) dx_0$$

Con argomenti standard di analisi funzionale (vedi [H]) si deduce allora che il problema di Cauchy è ben posto a $x_0 = 0$.

BIBLIOGRAFIA

- [B] E. BERNARDI, "The Cauchy problem for a model equation with triple characteristics", in corso di stampa su Ann. Mat. Pura Appl..
- [B-B]1 E. BERNARDI-A. BOVE, "Geometric results for a class of hyperbolic operators with double characteristics" Comm. in P.D.E., 13(1), 61-86.
- [B-B]2 E. BERNARDI, A. BOVE, "Necessary and sufficient conditions for the well-posedness of the Cauchy problem for a class of hyperbolic operators with triple characteristics", Preprint.
- [H] L. HÖRMANDER, "The Cauchy problem for differential equations with double characteristics. J. d'An. Math. 32 (1977), 118-190.
- [I] V. Ja IVRII, "The well-posedness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic operators III, The energy integral". Trans. Moscow Math. Soc. 34 (1978), 149-168.
- [I-P] V. Ja IVRII, V. PETKOV, "Necessary conditions for the correctness of the Cauchy problem for non strictly hyperbolic equations", Uspeki Mat. Nauk. 29: 5 (1974), 3-70.
- [N] T. NISHITANI, "Hyperbolic operators with symplectic multiple characteristics", Preprint.